THLR - Théorie des langages rationnels

Maxime Bridoux

Septembre 2020

Automate déterministe

DFA - Deterministic Finite Automaton

Un automate fini $A = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$ est déterministe si:

- il y a un unique état initial i.e. $|I| = 1$
- pour tout $q \in Q$ et $a \in \Sigma$, si (q, a, r_1) et $(q, a, r_2) \in \delta$ alors $r_1 = r_2$.

Si $I = \{q_0\}$ on note parfois $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$

Transitions

Soit une transition $(q, a, r) \in \delta$, on peut considérer δ comme une fonction partielle $Q \times \Sigma \to Q$ et écrire $\delta(q, a) = r$.
On définit également sa clôture transitive $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$

Reconnaissance dans un automate déterministe

Langage reconnu

$$L(A) = \{u \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, u) \in F\}$$

Algorithme de reconnaissance

q := q_0 ;
for i := 1 to n do
  q := $\delta(q, u_i)$
return $q \in F$

Complexité

Le reconnaissance d'un mot u dans un DFA se fait en exactement $|u|$ étapes

Déterminisation

Automates des parties

Soit un automate $A = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$. L'automate des parties de A est l'automate déterministe $A' = (\Sigma, 2^Q, \{I\}, F', \delta')$ où:

- $F' = \{P \subseteq Q \mid F \cap P \neq 0\}$
- $\delta'(P, a) = \{q \in Q \mid \exists p \in P, (p, a, q) \in \delta\}$

Le non-déterminisme n'augmente pas l'expressivité

On a $L(A) = L(A')$: les langages reconnus par les automates non-déterministes sont exactement ceux reconnus par automate déterministe. Néanmoins déterminiser un automate augmente potentiellement sa taille de façon exponentielle

Lemme de l'étoile

Énoncé

Soit L un langage rationnel. Alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $u \in L$ tel que $|u| \geq N$ il existe une décomposition de $u = vtw$ où $0 < |t| \leq N$ et pour tout $n \geq 0$, $vt^nw \in L$

Application : montrer la non-rationalité

Le langage $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ n'est pas rationnel

Lemme de l'étoile

Énoncé

Soit L un langage rationnel. Alors il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $u \in L$ tel que $|u| \geq N$ il existe une décomposition de $u = vtw$ où $0 < |t| \leq N$ et pour tout $n \geq 0$, $vt^n w \in L$

Conséquences

Théorème

Si A est un automate fini contenant k états:

1. $L(A)$ est non vide si et seulement si A reconnaît un mot de longueur strictement inférieure à k
2. $L(A)$ est infini si et seulement si A reconnaît un mot u tel que $k \leq |u| < 2k$

Décidabilité

Soit A un automate fini, il existe un algorithme permettant de décider si:

- $L(A)$ est vide
- $L(A)$ est fini / infini