THLR - Théorie des langages rationnels

Maxime Bridoux

Septembre 2020

Opérations sur les reconnaissables

Rappel

Les langages rationnels sont clos par:

- union, concaténation, étoile
- préfixe, suffixe, facteur

Clôture

Les langages reconnaissables sont clos par:

- union, concaténation, étoile
- intersection, préfixe, suffixe, facteur
- passage au complémentaire
- morphisme, morphisme inverse

Méthode de Brzozowski et McCluskey

Automates généralisés

Un automate généralisé est un automate normalisé où les transitions sont étiquetées par des expressions rationnelles.

Principe

Étant donné un automate généralisé, on fusionne deux états ensemble jusqu'à obtenir un automate avec l'état initial et l'état final. L'expression rationnelle obtenue dénote alors le langage reconnu par l'automate

Transformations

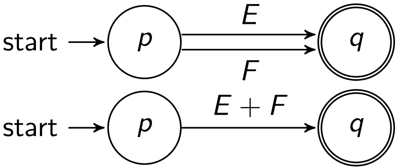

Figure: Réduction des transitions E et F.

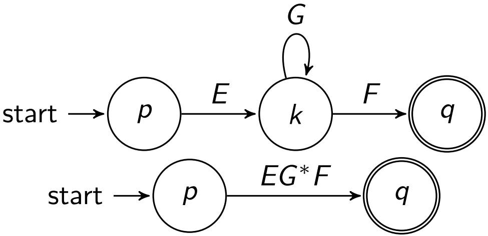

Figure: Réduction de l'état k.

Algorithme

Algorithme

```
Rajouter un etat initial i et un etat final f
Pour k de 1   |Q|:
    Fusionner toutes les transitions
    Fusionner deux etats
Fusionner toutes les transitions
```

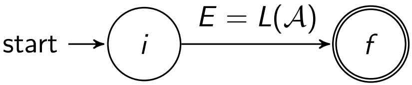

Figure: Automate final obtenu.

Quotients

Rappel

Le quotient à gauche d'un langage $L \subseteq \Sigma^*$ par un mot $u \in \Sigma^*$ est le langage $u^{-1}L = \{v \mid uv \in L\}$.

Rationalité

Un langage L est reconnaissable (donc rationnel) si et seulement s'il possède un nombre fini de quotients à gauche

Automate minimal

Définition

Soit $L \in Rat(\Sigma^*)$. L'automate minimal de L est l'automate fini déterministe $A_L = (Q, I, F, \delta)$ où :

- $Q = \{u^{-1}L \mid u \in \Sigma^*\}$;
- $I = \{L\}$;
- $F = \{u^{-1}L \mid u \in L\}$;
- $\delta = \{(u^{-1}L, a, (ua)^{-1}L) \mid u \in \Sigma^*, a \in \Sigma\}$.

L'automate A_L ainsi construit reconnaît le langage L

Relation d'indistinguabilité

Soit un automate déterministe complet $A = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$. Pour tout état $q \in Q$ on note l'ensemble des mots menant de q à un état final l'ensemble

$$L_q = \{u \in \Sigma \mid \delta^*(q, u) \in F\}.$$

Congruence de Nérode

On appelle relation de Nérode la relation sur les états définie par:

$$q \sim q' \iff L_q = L'_q.$$

C'est une relation d'équivalence: deux états équivalents sont dits indistinguables

Propriétés

Congruence de Nérode

On appelle relation de Nérode la relation sur les états définie par:

$$q \sim q' \iff L_q = L'_q.$$

C'est une relation d'équivalence: deux états équivalents sont dits indistinguables

Propriétés de la relation de Nérode

- $q \sim q' \implies \delta(q, a) \sim \delta(q', a)$ pour toute lettre a
- $q \sim q' \implies (q \in F \iff q' \in F)$

On appelle congruence toute relation d'équivalence qui vérifie ces deux propriétés

Automate quotient

Automate quotient

Pour une congruence $\sim$ sur un automate déterministe complet $\mathcal{A} = (Q, \{i\}, F, \delta)$, on note $\overline{q}$ la classe d'équivalence de q par $\sim$. L'automate quotient est $A_{/\sim} = (Q_{/\sim}, \{\overline{i}\}, \{\overline{f} \mid f \in F\}, \delta')$ où

$$\delta'(\overline{q}, a) = \overline{\delta(q, a)}.$$

Théorème

Soit un automate déterministe complet A qui reconnaît un langage L. L'automate minimal A_L est isomorphe à l'automate quotient $A_{/\sim}$ où $\sim$ désigne la congruence de Nérode

Algorithme de Moore

Congruences

On définit les congruences de Moore suivante:

$$\forall n \geq 0, p \sim_n q \iff L_p^{(n)} = L_q^{(n)}$$

où $L_q^{(n)} = \{u \in \Sigma^* \mid \delta(q,u) \in F, |u| \leq n\}$

Principe d'itération

$$p \sim_{n+1} q \iff \begin{cases} p \sim_n q \\ \delta(p,a) \sim_n \delta(q,a) \quad \forall a \in \Sigma \end{cases}$$

Terminaison

$$\sim_n = \sim_{n+1} \iff \forall r \geq 0, \sim_n = \sim_{n+r} = \sim_{Nerode}$$

Algorithme de Moore

Pseudo-code

```
P := {F, Q F}
P' := {}
tant que P != P':
    P' := P
    pour C ∈ P et a ∈ Σ:
        P := separer C selon δ(q,a) pour q ∈ C
return P
```

Conséquences

Minimisation

On dispose d'un algorithme qui minimise un automate déterministe complet en temps polynomial par rapport à sa taille

Problème de décision

L'égalité de deux langages rationnels est décidable