

## Logique

Maxime Bridoux

### Exercice 1 (Problème SAT)

Rappeler la complexité du problème SAT suivant :

**Entrée :** Une formule propositionnelle  $\phi$  ;

**Sortie :** Oui si  $\phi$  est satisfiable, non sinon.

Qu'en est-il si  $\phi$  est une formule close du premier ordre ?

### Exercice 2 (Dédution naturelle)

Montrer en déduction naturelle :

1.  $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\exists x.P(x)) \wedge (\exists x.Q(x))$
2.  $\Gamma \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow C$  ssi  $\Gamma \vdash (A \wedge B) \Rightarrow C$

### Exercice 3 (Théories)

Parmi les énoncés suivants, prouver ceux qui sont vrais et expliquer pourquoi les autres ne le sont pas forcément :

1. Une théorie complète et récursivement énumérable est récursive.
2. Une théorie récursive est complète.
3. Soit un ensemble de structures tel que pour tout  $i, j, S_i \models \phi$  ssi  $S_j \models \psi$ . Alors  $\{\phi \mid \exists i, S_i \models \phi\}$  est complète.
4. Si  $T$  est satisfiable et  $T \not\models \phi$  alors  $T \cup \{\neg\phi\}$  est satisfiable.

### Exercice 4 (Compacité)

Montrer que si une théorie  $T$  est finiment axiomatisable, alors de toute axiomatisation de  $T$  on peut en extraire une axiomatisation finie.

### Exercice 5 (Herbrand)

Soit la formule  $\phi = [\forall x.(P(a) \wedge (P(x) \Rightarrow P(f(x))))] \Rightarrow [\exists x.P(f(f(x)))]$  où  $a$  est un symbole de constante.

1. Préciser la signature de  $\phi$ .
2. Skolémiser  $\neg\phi$ .
3. Calculer sa base de Herbrand.