Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Ensembles infinis)
Soit deux ensembles de formules Γ et Γ', potentiellement infinis.

1. Montrer que $Mod(\Gamma) \cap Mod(\Gamma') = Mod(\Gamma \cup \Gamma')$.
2. Déterminer un ensemble de formules Γ'' tel que $Mod(\Gamma) \cup Mod(\Gamma') = Mod(\Gamma'')$.

Exercice 2 (Interpolation)
Montrer que si $\varphi \models \psi$ alors il existe θ tel que $\varphi \models \theta \models \psi$ et $Var(\theta) \subseteq Var(\varphi) \cap Var(\psi)$.

Exercice 3 (Mise sous CNF)
On se donne la formule φ suivante :

$$\varphi = \vee_{i=1}^{n}(p_i \wedge q_i)$$

1. Construire une formule en CNF logiquement équivalente à φ.
2. En remarquant que $\nu \models \varphi$ ssi il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\nu(p_i) = \nu(q_i) = 1$, montrer que toutes les formules en CNF logiquement équivalentes à φ sont de taille exponentielle en n.

Exercice 4 (2-SAT)
On appelle k-SAT la restriction du problème de décision SAT à des formules en CNF ayant au plus k littéraux par clause.

1. Sans utiliser Tseitin, montrer que toute formule en CNF peut se réécrire en une formule équisatisfiable en 3-CNF.
2. On s'intéresse plus particulièrement au problème 2-SAT. On réduit 2-SAT à un problème de théorie des graphes à l'aide du *graphe d'implication* d'une formule φ :
   — les sommets sont les littéraux p et $\neg p$ pour toute variable p dans φ ;
   — pour toute clause $(l_1 \vee l_2)$ de φ avec l_1, l_2 des littéraux quelconques, on ajoute un arc (orienté) de $\neg l_1$ à l_2 et de $\neg l_2$ à l_1.
   Donner le graphe d'implication de $\varphi = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg r)$.
3. Donner le graphe d'implication de $\varphi = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (r \vee q)$.
4. Proposer un algorithme pour décider 2-SAT. Quelle est sa complexité ?
5. Démontrer la correction de l'algorithme.

Exercice 5 (HornSAT)

On appelle *clause de Horn* une clause contenant au plus un littéral positif. On distingue différents types de clauses de Horn :

- des clauses *positives* de la forme p
- des clauses *négatives* de la forme $\neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \cdots \vee \neg q_n$
- des clauses *strictes* de la forme $\neg q_1 \vee \neg q_2 \cdots \vee \neg q_n \vee p$

1. Réécrire ces différents types de clauses en faisant apparaître des implications.
2. On appelle HornSAT la restriction de SAT à une conjonction de clauses de Horn. En déduire un algorithme de complexité linéaire en la taille de la formule pour décider HornSAT.
3. Démontrer sa correction.