Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Résolution)
Utiliser la méthode de résolution pour prouver ou infirmer les énoncés suivants :

1. $\models (\neg p \wedge \neg r \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge q) \vee r \vee p$
2. $\models p \Rightarrow p$
3. $\models (p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
4. $\models ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
5. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \wedge r$
6. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

Exercice 2 (Club écossais)
Un club écossais a les règles suivantes :

1. Les membres non écossais doivent porter des chaussettes rouges.
2. Un membre sans kilt ne peut porter de chaussettes rouges.
3. Les membres marriés ne doivent pas sortir le dimanche.
4. Un membre sort le dimanche si et seulement s'il est écossais.
5. Tout membre portant un kilt doit être écossais et marié.
6. Les membres écossais doivent porter le kilt.

Modéliser les règles de ce club en logique propositionnelle et montrer via la résolution que ce club ne peut admettre aucun membre.

Exercice 3 (Arbre sémantique)
Construire l'arbre sémantique associé à

$$\{\neg q, p \vee q \vee r, p \vee \neg r, \neg p \vee q \vee \neg r, p \vee r\}.$$

Cet ensemble de clauses est-il satisfiable ? Donner un modèle ou une preuve d'insatisfiabilité par résolution.

Exercice 4 (Coloration de graphe)
Une k-coloration d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est une fonction $c : V \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ telle que deux sommets voisins ont une couleur différente. Le but est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 *(de De Bruijn-Erdős) Un graphe (potentiellement infini) est k-coloriable si et seulement si tous ses sous-graphes finis le sont.*

1. Modéliser le problème de k-coloration d'un graphe G à l'aide de la logique propositionnelle.
2. Soit le sous-graphe $G_{|V'}$ de G restreint à un ensemble de sommets V' . Donner un ensemble de formules propositionnelles $E_{V'}$ satisfiable si et seulement si $G_{|V'}$ est k-coloriable.
3. Démontrer le théorème en utilisant la compacité de la logique propositionnelle.

Exercice 5 (HornSAT)
On appelle *clause de Horn* une clause contenant au plus un littéral positif. On distingue différents types de clauses de Horn :

- des clauses *positives* de la forme p
- des clauses *négatives* de la forme $\neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \cdots \vee \neg q_n$
- des clauses *strictes* de la forme $\neg q_1 \vee \neg q_2 \cdots \vee \neg q_n \vee p$

1. Réécrire ces différents types de clauses en faisant apparaître des implications.
2. On appelle HornSAT la restriction du problème SAT à une conjonction de clauses de Horn. En déduire un algorithme de complexité linéaire en la taille de la formule pour décider HornSAT.
3. Démontrer sa correction.

Exercice 6 (Résolution unitaire)
On considère le système de *résolution unitaire* suivant, où l'on remplace la règle de résolution par une règle de résolution unitaire sur un littéral l :

$$\frac{C \vee l \quad \neg l}{C}\,\textit{résolution unitaire} \qquad \frac{C \vee l \vee l}{C \vee l}\,\textit{factorisation}$$

1. Ce système est-il correct ?
2. Montrer que ce système n'est pas complet.
3. Montrer que ce système est complet si l'on se restreint aux ensembles de clauses de Horn.