Logique

Maxime Bridoux

Dans tout l'énoncé on note R le système de résolution muni des règles usuelles de résolution et de factorisation.

Exercice 1 (Principe des tiroirs)
Le principe des tiroirs affirme que si n chaussettes occupent m tiroirs et que $n > m$ alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette. On s'intéresse ici aux arbres de preuves obtenus par réfutation en résolution de la logique propositionnelle.

1. Proposer une modélisation du problème en logique propositionnelle
2. Proposer une formule PHP_m^n modélisant la négation du principe des tiroirs pour tout $n, m \geq 1$.
3. On note $PHP_n = PHP_{n-1}^n$ pour tout $n \geq 2$. Montrer que $PHP_2 \vdash_R \bot$ et expliciter PHP_3.
4. On admettra que pour tout $n \geq 2$, la taille minimale d'un arbre de preuve par réfutation de PHP_n est de taille au moins $2^{n/20}$. Conclure sur l'existence d'un certificat de taille polynomiale pour le problème de décision de la validité d'une formule propositionnelle.

Exercice 2 (Factorisation)
On considère le système de preuves R_f muni des règles de résolution et de factorisation, mais où ne peut pas appliquer la règle de résolution si on peut appliquer celle de factorisation. Soit un ensemble de clauses E.

Montrer que si $E \vdash_R C$ alors $E \vdash_{R_f} D$ tel que $C = D \vee D'$.

Exercice 3 (Stratégie *set-of-support*)

1. Rappeler le principe de la stratégie set-of-support.
2. L'ensemble de clauses $E = \{q, \neg q \vee \neg p, p \vee r\}$ est-il satisfiable ?
3. Montrer que $E \models r \vee \neg(p \Rightarrow q)$ via la stratégie set-of-support de la résolution.
4. Montrer que cette stratégie est toujours réfutationnellement complète.

Exercice 4 (Complétude)
On considère le système de preuves R_+ muni des règles usuelles de résolution et de factorisation auxquelles on ajoute également les règles suivantes :

$$\frac{}{p \vee \neg p}\,\textit{tiers exclu} \qquad \frac{C}{C \vee l}\,\textit{affaiblissement}$$

1. Montrer que ce système est correct.
2. Montrer que pour tout ensemble de clauses E, toute clause C' et pour tous litéraux $l_1, \ldots, l_k$ que

$$E, \neg l_1, \ldots, \neg l_2 \vdash_{R_+} C' \text{ entraîne } E \vdash_{R_+} l_1 \vee \cdots \vee l_k \vee C'.$$

3. En déduire la complétude de R_+ : si $E \models C$ alors $E \vdash_{R_+} C$ et ce pour ensemble de clauses E et toute clause C.