Logique

Maxime Bridoux

Dans tout l'énoncé on note $\Gamma \vdash \varphi$ le séquent de déduction naturelle (Γ, ϕ) où Γ est un ensemble de formules et ϕ une formule.

Exercice 1

Montrer les séquents suivants en déduction naturelle :

1. $\phi, \phi \Rightarrow \psi \vdash \psi$
2. $\vdash \phi \Rightarrow \neg\neg\phi$
3. $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$

Exercice 2 (Agreg info 2022, épreuve 1, problème 3)

Nous avons les faits suivants :

1. Si Informatix réussit sa preuve, il sera content.
2. S'il pleut, Informatix restera chez lui.
3. Si Informatix ne reste pas chez lui, alors il sera content.
4. Chez lui, Informatix s'entraîne.
5. Informatix réussira sa preuve s'il s'entraîne.

1. Formaliser ces faits à l'aide de formules logiques propositionelles.
2. Montrer, en déduction naturelle, qu'Informatix sera content.
3. Montrer en déduction naturelle les deux séquents suivants. Lequel des deux n'est pas prouvable en logique intuitionniste ?
   (a) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$
   (b) $\vdash (\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
4. A partir de la règle $\vdash A \vee \neg A$, est-il possible de montrer $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$? Si oui, faire la démonstration, sinon expliquer pourquoi.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{NM_0} \arrow[r, "+\ ..."] \arrow[rr, bend left, "+\ ..."] & \boxed{NJ_0} \arrow[r, "+\ ..."] & \boxed{NK_0}
\end{tikzcd}
$$

FIGURE 1 – Règles de déduction naturelle.

Exercice 3

Remplir le schéma en Figure 1 avec les noms des règles suivantes :

$$
\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\phi}{\Gamma \vdash \phi}\ \text{RAA} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\ \bot_{\mathrm{E}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\phi \Rightarrow \neg\psi}{\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \phi}\ \mathit{Contra} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \phi \vee \neg\phi}\ \text{TE}
$$

Exercice 4 (Logique intuitionniste et tiers-exclu)
Contrairement à la logique intuitionniste, il est possible en logique classique de faire des preuves non constructives, notamment à l'aide du tiers-exclu :

1. Montrer, en arithmétique classique, qu'il existe a et b irrationnels tels que a^b est rationnel. *Indication : considérer* $a = b = \sqrt{2}$ *et le tiers-exclu*

Le but de l'exercice est de montrer que le tiers-exclu n'est pas valide en logique intuitionniste, sans utiliser la sémantique usuelle des modèles dits *de Kripke*. On considère plutôt l'interprétation I suivante des formules dans l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle. Étant donné une iterprétation $I(p)$ des variables propositionnelles en ouverts de $\mathbb{R}$, on l'étend par induction aux formules :

- $I(\bot) = \emptyset$ et $I(\top) = \mathbb{R}$;
- $I(\phi \wedge \psi) = I(\phi) \cap I(\psi)$;
- $I(\phi \vee \psi) = I(\phi) \cup I(\psi)$;
- $I(\neg\phi)$ est l'intérieur de $\mathbb{R} \setminus I(\phi)$;
- $I(\phi \Rightarrow \psi)$ est l'intérieur de $(\mathbb{R} \setminus I(\phi)) \cup I(\psi)$.

Un jugement $\Gamma \vdash P$ est dit *valide* si pour tout I on a $\cap_{Q\in\Gamma} I(Q) \subseteq I(P)$.

2. Montrer que le tiers-exclu n'est pas valide.
3. Montrer que tout jugement prouvable en logique intuitionniste est valide.