Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 ()

1. Combien y a-t-il de structures de Herbrand pour :
   (a) $\mathcal{F} = \{a(0), b(0)\}, \mathcal{P} = \{R(1)\}$;
   (b) $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}, \mathcal{P} = \{= (2)\}$;
   (c) $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}, \mathcal{P} = \{Q(0)\}$.
2. Soit $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{R(1)\}$. Donner un modèle de Herbrand pour $\forall x.R(x) \Longleftrightarrow\neq R(s(x))$.
3. Soit $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{= (2)\}$. Skolémiser $\forall x \exists y.x = s(y)$. Donner un modèle de Herbrand de la formule résultante.

Exercice 2 (Syntaxe du 1er ordre)

Soit la signature $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ où $\mathcal{F}$ est l'ensemble de symboles de fonctions $\{0[0], +[2], \mathrm{succ}[1]\}$ et $\mathcal{P}$ est l'ensemble de symboles de prédicats $\{= [2]\}$. Soit x et y des variables. Pour chaque expression suivante, dire si c'est une formule sur $\mathcal{S}$. Le cas échéant, la représenter sous forme d'arbre (où les feuilles sont les formules atomiques).

1. $\forall x\ (0 + x = x)$
2. $\forall x\ (x \Rightarrow x \vee y)$
3. $\forall x\ (\mathrm{succ}(x) + y = \mathrm{succ}(x + y))$
4. $\forall x\ (\mathrm{succ}(x) = \mathrm{succ}(y) \Rightarrow x = y)$
5. $\forall x\ (x = 0 \vee \exists y\ (x = \mathrm{succ}(y)))$
6. $\forall x\ (\neg\, \mathrm{succ}(x) = 0)$
7. $\forall x\ (\neg\, \mathrm{succ}(x) \Rightarrow x = 0)$
8. $\forall x \forall y \exists z\ (x + z = y)$

Exercice 3 (Déduction naturelle au 1er ordre)

On considère la signature $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ où $\mathcal{F} = \{f[1]\}$ et $\mathcal{P} = \{= [2]\})$. On étend la déduction naturelle du 1er ordre en logique classique avec les règles suivantes :

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t} =_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash \phi[x := u]} =_{\mathrm{E}}$$

1. Proposer une formule ϕ sur $\mathcal{S}$ énonçant que si f est une involution, alors f est une surjection.
2. Montrer en déduction naturelle étendue que $\vdash \phi$.

Exercice 4 (Preuves sans détour dans NM_0)

On se retreint à des formules utilisant uniquement l'implication. Le but est de montrer que dans une dérivation sans détour de $\Gamma \vdash \phi$, on ne rencontre que des sous-formules de $\Gamma \cup \phi$.

1. Donner un contre-exemple si l'on retire l'hypothèse d'une preuve sans détour.
2. Montrer que si la dérivation termine par un axiome ou une élimination, toutes les formules apparaissant sont sous-formules de Γ, et que sinon les formules de la dérivation sont sous-formules des formules du séquent conclusion (antécédent ou succédent).