Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Définition inductive)

On considère un ensemble fini de noeuds G muni d'une relation binaire d'adjacence $n \to n'$, et un élément arbitraire $n_1 \in G$. On propose ci-dessous plusieurs définitions de sous-ensembles de G.

On définit inductivement $A \subseteq G$ par :
— $n_1 \in A$;
— pour tous noeuds m, m' on a $m' \in A$ si $m \to m'$ et $m \in A$.

On définit inductivement $A' \subseteq G$ par :
— $n_1 \in A'$;
— pour tous noeuds m, m' tel que $m' \in A'$, on a $m \to m'$.

On définit inductivement $U \subseteq G$ par :
— pour tout noeud m', on a $m' \in U$ si,
pour tout noeud m tel que $m \to m'$, on a $m \in U$.

On définit inductivement $E \subseteq G$ par :
— pour tout noeud m', on a $m' \in E$ si
il existe un noeud m tel que $m \to m'$ et $m \in E$.

1. Laquelle de ces définitions n'est pas une définition inductive bien formée ? On pourra exhiber la fonction sous-jacente pour montrer qu'elle n'est pas monotone.
2. Lequel des sous-ensembles restants est vide quel que soit G ? Le démontrer par induction sur la définition du sous-ensemble, ou bien en revenant au théorème de point fixe pour la fonction monotone sous-jacente.
3. Un des sous-ensembles restants peut être vide, ou non, en fonction de G. Lequel ? justifier en donnant des exemples de graphes rendant l'ensemble vide ou non.
4. Caractériser le sous-ensemble restant : l'appartenance d'un noeud à cet ensemble s'exprime directement en des termes usuels de théorie des graphes. Démontrer la caractérisation en donnant deux preuves par induction (une pour chaque direction de l'équivalence).

Exercice 2 (Fonction 91 de McCarthy)
On définit inductivement la relation binaire $\mathcal{R}$ sur les entiers naturels par :
- $n\mathcal{R}(n-10)$ si $n > 100$;
- $n\mathcal{R}x$ s'il existe y tel que $(n+11)\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ si $n \leq 100$.

Montrer que $n\mathcal{R}x$ si et seulement si $\begin{cases} x = n - 10 & \text{si } n > 100 \\ x = 91 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 3 (Agreg info 2022, épreuve 1, problème 3)
Nous avons les faits suivants :

1. Si Informatix réussit sa preuve, il sera content.
2. S'il pleut, Informatix restera chez lui.
3. Si Informatix ne reste pas chez lui, alors il sera content.
4. Chez lui, Informatix s'entraîne.
5. Informatix réussira sa preuve s'il s'entraîne.

1. Formaliser ces faits à l'aide de formules logiques propositionelles.
2. Montrer, en déduction naturelle, qu'Informatix sera content.
3. Montrer en déduction naturelle les deux séquents suivants.
   (a) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$
   (b) $\vdash (\neg A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
4. A partir de la règle $\vdash A \vee \neg A$, est-il possible de montrer $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$? Si oui, faire la démonstration, sinon expliquer pourquoi.