TD10 12 avril 2024

Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Résolution)
Soit φ_1 la formule $\forall x.((\exists y.\neg R(x,y)) \Rightarrow \exists y.(R(x,y) \wedge R(y,x)))$ et φ_2 la formule $\forall x \forall y \forall z.((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z))$.

Montrer par la méthode de résolution que $\varphi_1, \varphi_2 \models \exists x.R(x,x)$.

Exercice 2 (Complétude de la résolution au 1er ordre)
Pour un ensemble de clauses E, on note $H(E) := \{H(C) \mid C \in E\}$ l'ensemble de ses instances de Herbrand. On note R (resp. R_1) le système de preuve par résolution en logique propositionnelle (resp. au 1er ordre) constitué des règles de coupure et factorisation.

1. Montrer le lemme suivant, dit *de relèvement*.

Lemme 1 (de relèvement) *Si E est un ensemble de clauses et si $H(E) \vdash_R D$ (en logique propositionnelle), alors il existe une clause C telle que $E \vdash_{R_1} C$ (en logique du premier ordre) et $D \in H(C)$.*

2. En déduire la complétude de la résolution au 1er ordre.

Exercice 3 (Corps non archimédiens)
On appelle *corps non archimédien* un corps ordonné $(K, +, \times, \leq)$ ayant un élément $\epsilon > 0$ tel que $n\epsilon < 1$ pour tout entier n. Le but est de montrer qu'il existe un corps non archimédien.

1. On suppose disposer d'un ensemble Γ de formules définissant la théorie des corps ordonnés. Soit l'ensemble de formules suivant :

$$\Gamma' = \Gamma \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n \times \epsilon \leq 1 \wedge \neg(n \times \epsilon = 1)\}$$

   Montrer que toute partie finie de Γ' est satisfiable.

2. Conclure par théorème de compacité.

Exercice 4 (Lowenheim-Skolem, suite)

On présente ici la deuxième partie du théorème de Löwenheim-Skolem :

Théorème 1 *(Théorème de Löwenheim-Skolem ascendant) Soit une signature $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ dénombrable, et Γ un ensemble de formules closes sur $\mathcal{S}$. Si Γ admet un modèle infini, alors Γ admet un modèle infini de cardinal arbitrairement grand.*

Démontrer le théorème de Löwenheim-Skolem ascendant. Montrer que si l'on suppose en plus que $\mathcal{P}$ contient l'égalité, on peut obtenir un modèle infini qui est égalitaire.

Indice : étendre la signature avec un nombre arbitrairement grand de nouveaux symboles de constantes. Utiliser le théorème de compacité.