Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Théorie insatisfiable)
Soit une signature $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$.

1. Montrer que l'ensemble des $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-formules du 1er ordre est une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-théorie.
2. Montrer que c'est la seule $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-théorie insatisfiable.

Exercice 2 (Théorie axiomatisable)
On dit qu'une théorie est *axiomatisable* si elle est engendrée par un ensemble d'axiomes A qui est récursif. Le but est de montrer qu'une théorie est récursivement énumérable si et seulement si elle est axiomatisable.

1. Soit une théorie $\mathcal{T}$ récursivement énumérable. Soit un énumérateur de formules pour $\mathcal{T}$ produisant $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Pour une formule ϕ, on pose ϕ^m la formule :
$$\underbrace{\phi \wedge \cdots \wedge \phi}_{m \text{ fois}}$$
Montrer que l'ensemble $A = \{\varphi_i^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ est récursif. Conclure sur le sens direct.
2. Soit A un ensemble récursif. Montrer que l'on peut donc énumérer toutes les formules valides de la forme $(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$ avec $\phi_i \in A$. Conclure sur le sens réciproque.
3. Soit $\mathcal{T}$ la théorie de la structure $(\mathbb{N}, 0, 1, +, *, =)$. On rappelle que $\mathcal{T}$ n'est pas récursive. Est-elle axiomatisable ?

Exercice 3 (Théorie des grilles)

On cherche ici à formaliser une théorie dont les modèles sont les grilles. On se place sur la signature $\mathcal{S} = (\{g[1], d[1], h[1], b[1]\}, \{= [2]\})$ (pour *gauche*, *droite*, *haut*, *bas*) et on pose la théorie T_0 engendrée par les axiomes suivants :

$$\begin{cases} Ax_= & \\ \forall x. & g(d(x)) = x \\ \forall x. & d(g(x)) = x \\ \forall x. & b(h(x)) = x \\ \forall x. & h(b(x)) = x \\ \forall x. & g(h(x)) = h(g(x)) \\ \forall x. & g(b(x)) = b(g(x)) \\ \forall x. & d(h(x)) = h(d(x)) \\ \forall x. & d(b(x)) = b(d(x)) \end{cases}$$

1. Montrer que les structures canoniques des ensembles suivants sont des modèles de T_0 :
   (a) $\mathbb{Z}^2$
   (b) $[\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$ pour $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$
   (c) $[\![1, n]\!] \times \mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

   A quoi ressemblent les grilles associées ?
2. Déterminer une théorie T_1, extension de T_0, modélisant des grilles nécessairement planaires infinies. T_1 peut-elle être engendrée par un nombre fini d'axiomes ?

On dit que M est un modèle *connexe* de T_1 lorsque pour tout $x, y \in D_M$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $f_1, \ldots, f_n \in \{g_M, d_M, h_M, b_M\}$ tels que $x = f_1(\ldots f_n(y) \ldots)$.

3. Déterminer un modèle non connexe de T_1.
4. Montrer à l'aide du théorème de compacité que toute extension de T_0 qui possède $\mathbb{Z}^2$ comme modèle possède un modèle non-connexe.

Exercice 4 (Théorie des corps)
On se place sur la signature $\mathcal{S} = (\{0[0], 1[0], +[2], \times[2]\}, \{= [2]\})$.

1. Proposer un ensemble d'axiomes tels que les modèles de la théorie engendrée par ces axiomes soient exactement les corps.

On définit la théorie ACF des corps algébriquement clos [1] en ajoutant à la théorie des corps :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ l'énoncé } \forall y_1 \dots \forall y_n \exists x.(x^n + y_1 x^{n-1} + \cdots + y_n = 0).$$

2. On admet que ACF admet l'élimination des quantificateurs. ACF est-elle complète ? La théorie des corps est-elle complète ?
3. Montrer que si K est un corps algébriquement clos, alors tout système fini $\phi(x_1, \dots, x_n)$ d'équations et d'inéquations à coefficients dans K qui a une solution dans une extension de corps L/K a déjà une solution dans K lui-même.
4. Soit une formule close ϕ. Montrer que ϕ est vraie dans tout corps algébriquement clos de caractéristique [2] nulle si et seulement si ϕ est vraie dans tout corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, pour tout p premier sauf un nombre fini.

1. Tout polynôme de degré non nul à coefficients dans ce corps admet (au moins) une racine dans ce corps.
2. La *caractéristique* d'un corps est le nombre minimum de fois où il faut additionner 1 pour obtenir 0 ; elle est nulle s'il n'existe pas de tel entier.