Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Problèmes SAT et VALID)
Rappeler la complexité des problèmes de décision suivants. Que peut-on dire de ces problèmes si φ est une formule close du premier ordre ?

$\boxed{\textbf{SAT}}$

Entrée : Une formule propositionnelle φ ;

Sortie : Oui si φ est satisfiable, non sinon.

$\boxed{\textbf{VALID}}$

Entrée : Une formule propositionnelle φ ;

Sortie : Oui si φ est valide, non sinon.

Exercice 2 (Déduction naturelle)
Montrer en déduction naturelle :

1. $\Gamma \vdash A \Rightarrow B \Rightarrow C$ ssi $\Gamma \vdash (A \wedge B) \Rightarrow C$ pour A, B, C des variables propositionnelles
2. $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\exists x.P(x)) \wedge (\exists x.Q(x))$

Exercice 3 (Compacité)
Montrer que si une théorie T est finiment axiomatisable, alors de toute axiomatisation de T on peut en extraire une axiomatisation finie.

Exercice 4 (Herbrand)
Soit la formule $\varphi = [\forall x.(P(a) \wedge (P(x) \Rightarrow P(f(x))))] \Rightarrow [\exists x.P(f(f(x)))]$ où x est une variable et a est un symbole de constante.

1. Donner une signature possible de φ.
2. Skolémiser $\neg\varphi$.
3. Calculer sa base de Herbrand.

Exercice 5 (Théories)
Parmi les énoncés suivants, prouver ceux qui sont vrais et expliquer pourquoi les autres ne le sont pas forcément :

1. Une théorie complète et récursivement énumérable est récursive.
2. Une théorie récursive est complète.
3. Soit un ensemble de structures $\{S_i\}_i$ tel que pour tout $i, j, (S_i \models \phi$ ssi $S_j \models \phi)$. Alors $\{\psi \mid \exists i, S_i \models \psi\}$ est complète.
4. Si T est satisfiable et $T \not\models \phi$ alors $T \cup \{\neg\phi\}$ est satisfiable.

Exercice 6 (Disjonction en calcul des séquents)
On considère la règle suivante en calcul des séquents :

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, \neg A, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$$

1. Montrer que la règle est correcte par un argument sémantique direct.
2. Montrer que la règle est dérivable dans le calcul des séquents classique avec coupure.
3. Cette règle est-elle correcte pour la logique constructive ? Justifier.

Exercice 7 (Résolution)
On pose la signature $(\mathcal{F}, \mathcal{P}) = (\{f[1]\}, \{=[2]\})$.

1. Rappeler les axiomes A de la théorie de l'égalité sur cette signature.
2. On pose B la formule $\forall x. f(f(x)) = x$. Montrer par résolution que $\phi_1 \stackrel{def}{=} \forall x.\forall y.(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$ et $\phi_2 \stackrel{def}{=} \forall z.\exists x. f(x) = z$ sont conséquences logique de A et B.