Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Quiz)
Vrai ou faux ?

1. $\varphi \vee \psi$ est satisfiable ssi (φ est satisfiable ou ψ est satisfiable)
2. $\varphi \wedge \psi$ est satisfiable ssi (φ est satisfiable et ψ est satisfiable)
3. $\varphi \vee \psi$ est valide ssi (φ est valide ou ψ est valide)
4. $\varphi \wedge \psi$ est valide ssi (φ est valide et ψ est valide)
5. φ et $\varphi[P := Q]$ ont les mêmes modèles
6. φ et $\varphi[P := Q]$ sont équisatisfiables
7. φ et $\varphi[P := Q]$ sont équivalides

Exercice 2 (Mise sous CNF)
On se donne la formule φ suivante :

$$\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} (P_i \wedge Q_i)$$

1. Construire une formule en CNF logiquement équivalente à φ.
2. En remarquant que $\nu \models \varphi$ si et seulement s'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\nu(P_i) = \nu(Q_i) = 1$, montrer que toutes les formules en CNF logiquement équivalentes à φ sont de taille exponentielle en n.

Exercice 3 (Transformation de Tseitin)
On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des variables. Pour une formule φ, on note $SF(\varphi)$ l'ensemble des sous-formules de φ (φ inclus). Pour toute sous-formule $\psi \in SF(\varphi)$, on définit une nouvelle variable propositionnelle P_ψ. On lit intuitivement cette variable comme "ψ est vraie".

On cherche à montrer que pour toute formule φ du calcul propositionnel, il existe une formule $T(\varphi)$ sous 3-CNF de taille $O(|\varphi|)$ et telle que φ et $T(\varphi)$ sont équisatisfiables.

1. Proposer une formule en 3-CNF de taille constante équivalente à $P_{\neg\psi} \leftrightarrow \neg P_\psi$. On appelera $t(\neg\psi)$ la formule en 3-CNF.
2. Faire de même pour $P_{\psi_1 \bowtie \psi_2} \leftrightarrow P_{\psi_1} \bowtie P_{\psi_2}$ où $\bowtie \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

On pose la transformation suivante (dite de Tseitin) :

$$T(\varphi) = P_\varphi \wedge \bigwedge_{\psi \in SF(\varphi) \setminus \mathcal{P}} t(\psi)$$

1. Donner $T((R \vee \neg Q) \vee (\neg R))$.
2. Montrer que $T(\varphi)$ est de taille $O(|\varphi|)$.
3. Montrer que φ et $T(\varphi)$ sont équisatisfiables.

Exercice 4 (2-SAT)
On s'intéresse au problème 2-SAT, a restriction du problème de décision SAT à des formules en CNF ayant exactement 2 littéraux par clause. On réduit 2-SAT à un problème de théorie des graphes à l'aide du *graphe d'implication* d'une formule φ :

— les sommets sont les littéraux P et $\neg P$ pour toute variable P dans φ ;
— pour toute clause $(L_1 \vee L_2)$ de φ avec L_1, L_2 des littéraux quelconques, on ajoute un arc (orienté) de $\neg L_1$ à L_2 et de $\neg L_2$ à L_1.

1. Donner le graphe d'implication de $\varphi = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R)$.
2. Donner le graphe d'implication de $\varphi = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (R \vee Q)$.
3. Proposer un algorithme pour décider 2-SAT. Quelle est sa complexité ?
4. Démontrer la correction de l'algorithme.

Exercice 5 (HornSAT)
On appelle *clause de Horn* une clause contenant au plus un littéral positif. On distingue différents types de clauses de Horn :

— des clauses *positives* de la forme P
— des clauses *négatives* de la forme $\neg Q_1 \vee \neg Q_2 \vee \cdots \vee \neg Q_n$
— des clauses *strictes* de la forme $\neg Q_1 \vee \neg Q_2 \cdots \vee \neg Q_n \vee P$

1. Réécrire ces différents types de clauses en faisant apparaître une implication à chaque fois.
2. On appelle HornSAT la restriction de SAT à une conjonction de clauses de Horn. En déduire un algorithme de complexité linéaire en la taille de la formule pour décider HornSAT.
3. Démontrer sa correction.

Exercice 6 (Ensembles infinis)
Soit deux ensembles de formules Γ et Γ', potentiellement infinis.

1. Montrer que $Mod(\Gamma) \cap Mod(\Gamma') = Mod(\Gamma \cup \Gamma')$.
2. Déterminer un ensemble de formules Γ'' tel que $Mod(\Gamma) \cup Mod(\Gamma') = Mod(\Gamma'')$.