Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Résolution)
Utiliser la méthode de résolution pour prouver ou infirmer les énoncés suivants :

1. $\models (\neg p \wedge \neg r \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge q) \vee r \vee p$
2. $\models p \Rightarrow p$
3. $\models (p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
4. $\models ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
5. $\{q \Rightarrow (\neg q \vee r), q \Rightarrow (p \wedge \neg r)\} \models q \wedge r$
6. $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, p \vee \neg r\} \models (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

Exercice 2 (Interpolation)
Montrer que si $\varphi \models \psi$ alors il existe θ tel que $\varphi \models \theta \models \psi$ et $Var(\theta) \subseteq Var(\varphi) \cap Var(\psi)$.

Exercice 3 (Coloration de graphe)
Une k-coloration d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ est une fonction $c : S \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ telle que deux sommets voisins ont une couleur différente. Le but est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 *(de De Bruijn-Erdős) Un graphe (potentiellement infini) est k-coloriable si et seulement si tous ses sous-graphes finis le sont.*

1. Modéliser le problème de k-coloration d'un graphe G à l'aide de la logique propositionnelle.
2. Soit le sous-graphe $G_{|S'}$ de G restreint à un ensemble de sommets S' . Donner un ensemble de formules propositionnelles $E_{S'}$ satisfiable si et seulement si $G_{|S'}$ est k-coloriable.
3. Démontrer le théorème en utilisant la compacité de la logique propositionnelle.

Exercice 4 (Arbre sémantique)
Construire l'arbre sémantique associé à

$$\{\neg q, p \vee q \vee r, p \vee \neg r, \neg p \vee q \vee \neg r, p \vee r\}.$$

Cet ensemble de clauses est-il satisfiable ? Donner un modèle ou une preuve d'insatisfiabilité par résolution.

Exercice 5 (Club écossais)
Un club écossais a les règles suivantes :

1. Les membres non écossais doivent porter des chaussettes rouges.
2. Un membre sans kilt ne peut porter de chaussettes rouges.
3. Les membres marriés ne doivent pas sortir le dimanche.
4. Un membre sort le dimanche si et seulement s'il est écossais.
5. Tout membre portant un kilt doit être écossais et marié.
6. Les membres écossais doivent porter le kilt.

Modéliser les règles de ce club en logique propositionnelle et montrer via la résolution que ce club ne peut admettre aucun membre.

Exercice 6 (Résolution unitaire)
On considère le système de *résolution unitaire* suivant, où l'on remplace la règle de résolution par une règle de résolution unitaire sur un littéral l :

$$\frac{C \vee l \quad \neg l}{C}\,\textit{résolution unitaire} \qquad\qquad \frac{C \vee l \vee l}{C \vee l}\,\textit{factorisation}$$

1. Ce système est-il correct ?
2. Montrer que ce système n'est pas complet.
3. Montrer que ce système est complet si l'on se restreint aux ensembles de clauses de Horn.