# Logique

Maxime Bridoux

Dans tout l'énoncé on note $R$ le système de résolution muni des règles usuelles de résolution et de factorisation.

**Exercice 1 (Complétude)**
On considère le système de preuves $R_+$ muni des règles usuelles de résolution et de factorisation auxquelles on ajoute également les règles suivantes :

$$\frac{}{P \vee \neg P}\,\textit{tiers exclu} \qquad \frac{C}{C \vee L}\,\textit{affaiblissement}$$

1. Montrer que ce système est correct.
2. Montrer par récurrence sur la longueur de la preuve par résolution que, pour tout ensemble de clauses $E$, toute clause $C'$ et pour tous litéraux $L_1, \ldots, L_k$ que
$$E, \neg L_1, \ldots, \neg L_k \vdash_{R_+} C' \text{ entraîne } E \vdash_{R_+} L_1 \vee \cdots \vee L_k \vee C'.$$
3. En déduire la complétude de $R_+$ : si $E \models C$ alors $E \vdash_{R_+} C$ et ce pour ensemble de clauses $E$ et toute clause $C$.

**Exercice 2 (Stratégie *set-of-support*)**
Le but de la stratégie *set-of-support* est d'accélérer la recherche d'une dérivation par résolution de $\perp$. L'idée est que si une formule $\varphi$ est conséquence logique d'un ensemble satisfiable de formules $\Gamma$, alors une preuve par résolution de $\Gamma \models \varphi$ doit nécessairement utiliser des clauses de $\neg\varphi$.

Formellement, on suppose que $E = E' \cup E''$ où $E'$ est un ensemble satisfiable de clauses et $E''$ est la négation d'une formule dont on cherche à savoir si c'est une conséquence de $E'$. On dit qu'une dérivation satisfait la stratégie set-of-support si tous ses sous-arbres non réduits à une feuille ont au moins une feuille dans $E''$.

1. Montrer qu'une dérivation de $\perp$ à partir de $E$ a au moins une feuille dans $E''$.
2. L'ensemble de clauses $\Gamma = \{Q, \neg Q \vee \neg P, P \vee R\}$ est-il satisfiable ? Montrer que $\Gamma \models R \vee \neg(P \to Q)$ via la stratégie set-of-support de la résolution.
3. Montrer que cette stratégie est toujours réfutationnellement complète. On pourra pour cela transformer une preuve de faux en une preuve respectant la stratégie par *rotations* locales successives.

**Exercice 3 (Principe des tiroirs)**
Le principe des tiroirs affirme que si $n$ chaussettes occupent $m$ tiroirs et que $n > m$ alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette. On s'intéresse ici aux arbres de preuves obtenus par réfutation en résolution de la logique propositionnelle.

1. Proposer une modélisation du problème en logique propositionnelle
2. Proposer une formule $PHP_m^n$ modélisant la négation du principe des tiroirs pour tout $n, m \geq 1$.
3. On note $PHP_n = PHP_{n-1}^n$ pour tout $n \geq 2$. Montrer que $PHP_2 \vdash_R \perp$.
4. On admettra que pour tout $n \geq 2$, la taille minimale d'un arbre de preuve par réfutation de $PHP_n$ est de taille au moins $2^{n/20}$. Conclure sur l'existence d'un certificat de taille polynomiale pour le problème de décision de la validité d'une formule propositionnelle.