Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Dérivations)
Montrer en calcul des séquents :

1. $\vdash \phi \vee \neg\phi$
2. $\vdash (\phi \to \psi) \to (\neg\phi \vee \psi)$
3. $\vdash (\neg\phi \vee \psi) \to (\phi \to \psi)$

Exercice 2 (Axiome atomique)
Sans s'appuyer sur la preuve de complétude du cours, montrer que tout ce qui est dérivable en LK_0 l'est toujours si on limite la règle axiom aux formules ϕ atomiques.

Exercice 3 (Système monolatère)
On s'intéresse dans cet exercice aux symétries entre les règles de LK_0. Par exemple, les règles $\top_R$ et $\bot_L$ sont similaires : un $\top$ à droite d'un séquent est traité de la même manière qu'un $\bot$ à gauche. Les mêmes observations peuvent aussi être faites pour $\vee_R$ et $\wedge_L$, à cause notamment des lois de Morgan.

1. Proposer un système de réécriture $\equiv_\bot$ permettant de réécrire toute formule ϕ sous forme normale négative.

On observe que si $\phi \equiv_\bot \psi$ alors toute preuve de $\Gamma, \phi \vdash \Delta$ peut être transformée localement en une preuve de $\Gamma, \psi \vdash \Delta$, et réciproquement. De même pour $\Gamma \vdash \phi, \Delta$ et $\Gamma \vdash \psi, \Delta$.

2. Illustrer cette transformation en passant de $\Gamma, \phi \to \psi \vdash \Delta$ à $\Gamma, \neg\phi \vee \psi \vdash \Delta$.

On cherche ici à exploiter cette symétrie afin de proposer le système suivant, dit *monolatère* :

$$\frac{}{\vdash \top, \Delta}\ \top \qquad \frac{}{\vdash \phi, \neg\phi, \Delta}\ \text{axiom}$$

$$\frac{\vdash \phi, \psi, \Delta}{\vdash \phi \vee \psi, \Delta}\ \vee \qquad \frac{\vdash \phi, \Delta \quad \vdash \psi, \Delta}{\vdash \phi \wedge \psi, \Delta}\ \wedge$$

où les formules sont implicitement identifiées modulo $\equiv_\bot$.

3. En déduire que $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \Delta$ est dérivable en LK_0 si et seulement si $\vdash \neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n, \Delta$ est dérivable dans le système monolatère.

4. Que se passerait-il si l'on souhaitait proposer un système de preuve identifiant les formules modulo l'équivalence logique $\equiv$?

Exercice 4 (Changement de contexte)
On considère la variante du calcul des séquents on l'on remplace $\wedge_R$ par la règle $\wedge'_R$ suivante :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \phi, \Delta_1 \quad \Gamma_2 \vdash \psi, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \phi \wedge \psi, \Delta_1, \Delta_2} \wedge'_R$$

Démontrer que cette variante est équivalente au système original.