Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Syntaxe du 1er ordre)

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de symboles de fonctions $\{0[0], +[2], \mathrm{succ}[1]\}$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble de symboles de prédicats $\{= [2]\}$. Soit x, y et z des variables de $\mathcal{X}$. Pour chaque expression suivante, dire si c'est une formule sur $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{X}$. Le cas échéant, la représenter sous forme d'arbre (où les feuilles sont les formules atomiques).

1. $\forall x\ (0 + x = x)$
2. $\forall x\ (x \Rightarrow x \vee y)$
3. $\forall x\ (\mathrm{succ}(x) + y = \mathrm{succ}(x + y))$
4. $\forall x\ (\mathrm{succ}(x) = \mathrm{succ}(y) \Rightarrow x = y)$
5. $\forall x\ (x = 0 \vee \exists y\ (x = \mathrm{succ}(y)))$
6. $\forall x\ (\neg\, \mathrm{succ}(x) = 0)$
7. $\forall x\ (\neg\, \mathrm{succ}(x) \Rightarrow x = 0)$
8. $\forall x \forall y \exists z\ (x + z = y)$

Exercice 2 (Axiomes de l'égalité)

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ tel que $\mathcal{P}$ contient le symbole $=$ d'arité 2. On cherche à définir un ensemble de formules $\mathcal{A}_{eq}$ (les axiomes de l'égalité) tel que pour tout modèle de $\mathcal{A}_{eq}$, on puisse toujours se ramener à un modèle qui interprète le symbole $=$ comme l'égalité usuelle. On dit qu'une structure $\mathcal{S}$ est égalitaire si $=_\mathcal{S}$ est l'égalité sur le domaine de $\mathcal{S}$.

1. Donner un ensemble de formules E tel que pour tout modèle $\mathcal{S}$ de E, $=_\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
2. Donner un ensemble de formules E' tel que pour tout modèle $\mathcal{S}$ de E', $=_\mathcal{S}$ est compatible avec les fonctions $f_\mathcal{S}$ et les relations $P_\mathcal{S}$ de $\mathcal{S}$.

Soit $\mathcal{S}$ un modèle de $\mathcal{A}_{eq}$. La relation $=_{\mathcal{S}}$ est donc une relation d'équivalence ; on note $[e]$ la classe d'équivalence de $e \in D_{\mathcal{S}}$ pour cette relation. On construit $\mathcal{S}'$ comme suit :

- $D_{\mathcal{S}'} = D_{\mathcal{S}}/=_{\mathcal{S}}$, l'ensemble des classes d'équivalences ;
- pour tout symbole de fonction, $f_{\mathcal{S}'}([e_1], \ldots, [e_n]) = f_{\mathcal{S}}(e_1, \ldots, e_n)$;
- pour tout symbole de prédicat, $([e_1], \ldots, [e_n]) \in P_{\mathcal{S}'}$ ssi $(e_1, \ldots, e_n) \in P_{\mathcal{S}}$.

3. Justifier en quoi cela définit bien une unique structure.
4. Pour tout $\sigma : \mathcal{X} \to D_{\mathcal{S}}$ on note $[\sigma]$ l'assignation $x \mapsto [\sigma(x)]$. Montrer qu'on a, pour tous σ et ϕ :
$$\mathcal{S}, \sigma \models \phi \text{ ssi } \mathcal{S}', [\sigma] \models \phi$$
5. En déduire qu'une formule est satisfaite dans tous les modèles de la théorie de l'égalité ssi elle est satisfaite dans toutes les structures égalitaires.

Exercice 3 (Logique intuitionniste et tiers-exclu)
Contrairement à la logique intuitionniste, il est possible en logique classique de faire des preuves non constructives, notamment à l'aide du tiers-exclu :

1. Montrer, en arithmétique classique, qu'il existe a et b irrationnels tels que a^b est rationnel. *Indication : considérer $a = b = \sqrt{2}$ et le tiers-exclu.*

Le but de l'exercice est de montrer que le tiers-exclu n'est pas valide en logique intuitionniste, sans utiliser la sémantique usuelle des modèles dits *de Kripke*. On considère plutôt l'interprétation I suivante des formules dans l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle. Étant donné une interprétation $I(p)$ des variables propositionnelles en ouverts de $\mathbb{R}$, on l'étend par induction aux formules :

- $I(\bot) = \emptyset$ et $I(\top) = \mathbb{R}$;
- $I(\phi \wedge \psi) = I(\phi) \cap I(\psi)$;
- $I(\phi \vee \psi) = I(\phi) \cup I(\psi)$;
- $I(\neg\phi)$ est l'intérieur de $\mathbb{R} \setminus I(\phi)$;
- $I(\phi \Rightarrow \psi)$ est l'intérieur de $(\mathbb{R} \setminus I(\phi)) \cup I(\psi)$.

Un jugement $\Gamma \vdash P$ est dit *valide* si pour tout I on a $\cap_{Q \in \Gamma} I(Q) \subseteq I(P)$.

2. Montrer que le tiers-exclu n'est pas valide.
3. Montrer que tout jugement prouvable en NJ_0 est valide.