TD7 22 mars 2024

Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Variables liées et substitution)
On rappelle qu'une substitution θ est applicable à une formule ϕ quand :

$$\mathrm{bv}(\phi) \cap \big(\mathrm{Dom}(\theta) \cup \bigcup_{x \in \mathrm{Dom}(\theta)} \mathrm{fv}(\theta(x))\big) = \emptyset$$

1. Sur quelles formules ϕ ci-dessous peut-on appliquer la substitution $\theta = \{x \mapsto f(y)\}$? Si on ignore la condition d'applicabilité, les différentes formules $\phi\theta$ obtenues sont-elles logiquement équivalentes ?
   (a) $(\forall x.P(x)) \wedge (\exists y.R(x, y)))$
   (b) $(\forall y.P(y)) \wedge (\exists z.R(x, z)))$
   (c) $(\forall z.P(z)) \wedge (\exists z.R(x, z)))$
2. La relation d'α-renommage est définie par

   $$\mathcal{Q}x.\phi \to_\alpha \mathcal{Q}y.\phi\{x \mapsto y\}$$

   où $\mathcal{Q}$ est un quantificateur, ϕ une formule, x et y sont des variables telles que $y \notin \mathrm{fv}(\phi)$ et que la substitution $\{x \mapsto y\}$ s'applique à ϕ.
   Les trois formules ci dessus sont α-équivalentes : on obtient l'une à partir de l'autre par une série d'α-renommages sur des sous-formules.
   Montrer que, pour toutes formules ϕ, ψ telles que $\phi \to_\alpha \psi$, et pour tous $\mathcal{S}, \sigma$ on a $\mathcal{S}, \sigma \models \phi$ ssi $\mathcal{S}, \sigma \models \psi$.
3. On considère la formule suivante :

   $$\forall y.\big(P(x, y) \wedge \exists y.Q(y, x)\big)$$

   Donner une série d'α-renommages à partir de cette formule pour obtenir une formule α-équivalente sur laquelle on puisse appliquer la substitution $\{x \mapsto f(y)\}$.

Exercice 2 (Quantificateurs et déduction naturelle)
Un séquent de déduction naturelle du premier ordre est toujours de la forme $\Gamma \vdash \phi$, mais avec Γ, ϕ un ensemble de formules du premier ordre. La formule associée à un tel séquent est la suivante, où $\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathrm{fv}(\Gamma, \phi)$:

$$\forall x_1, \ldots, x_n.\ (\bigwedge_{\psi \in \Gamma} \psi) \Rightarrow \phi$$

Autrement dit, les variables libres du séquent sont implicitement quantifiées universellement. Le séquent est valide quand cette formule l'est.

1. Démontrer la correction des règles de déduction naturelle pour le quantificateur universel :

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \forall x.\phi}\ \forall_{\mathrm{I}}\ (x \notin \mathsf{fv}(\Gamma)) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x.\phi}{\Gamma \vdash \phi[x := t]}\ \forall_{\mathrm{E}}$$

On considère maintenant la signature $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ où $\mathcal{F} = \{f[1]\}$ et $\mathcal{P} = \{= [2]\})$. On étend la déduction naturelle du 1er ordre en logique classique avec les règles suivantes :

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ =_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash \phi[x := u]}\ =_{\mathrm{E}}$$

2. Montrer la correction de ces deux règles.
3. Proposer une formule ϕ sur $\mathcal{S}$ énonçant que si f est une involution, alors f est une injection.
4. Montrer $\vdash \phi$ en déduction naturelle étendue.

Exercice 3 (Structures ordonnées)
On dit que deux structures sont *élémentairement équivalentes* si elles satisfont les mêmes formules closes du premier ordre. On pose $\mathcal{P} = \{\geq\}$ et $\mathcal{F} = \emptyset$, et on considère les $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structures $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ où $\geq$ est interprété de façon canonique.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas élémentairement équivalents.
2. On va montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont élémentairement équivalents. Si σ est une substitution à valeurs dans $\mathcal{S} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ on note $\geq_\sigma$ la relation d'ordre sur $\mathcal{X}$ définie par $x \geq_\sigma y$ ssi $\sigma(x) \geq_{\mathcal{S}} \sigma(y)$.

   Montrer que, pour toute formule ϕ et toutes assignations $\sigma : \mathcal{X} \to \mathbb{Q}$ et $\sigma' : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ telles que $\geq_\sigma$ et $\geq_{\sigma'}$ coïncident, on a $\mathbb{Q}, \sigma \vDash \phi$ ssi $\mathbb{R}, \sigma' \vDash \phi$.