Logique

Maxime Bridoux

Dans tout l'énoncé, on suppose que l'on fixe une signature dénombrable.

Exercice 1 (Calcul des séquents intuitionniste)
On obtient le système LJ_1 pour la logique intuitionniste en restreignant les séquents du calcul des séquents à avoir exactement une formule à droite.

1. Adapter les règles de LK_1 pour s'appliquer à des séquents $\Gamma \vdash \Delta$ où $|\Delta| = 1$.
2. Montrer que si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}_1} \Delta$, alors Δ contient exactement une formule.
3. Montrer que $\neg\exists x.P(x) \vdash_{\mathrm{LJ}_1} \forall x.\neg P(x)$.

Exercice 2 (Preuve de complétude)
On se place dans le cadre du système LK_1 monolatère.

1. Pour les séquents suivants, donner le séquent monolatère associé et en donner une preuve dans LK_1 monolatère.
   (a) $\forall x.\neg P(x) \vdash \neg\exists x.P(x)$.
   (b) $\vdash \exists y \forall x.(R(x) \Rightarrow R(y))$.

Soit a une constante. Les séquents suivants sont-ils valides ? En reprenant la preuve de complétude, exhiber une stratégie telle que la dérivation associée forme une preuve ou produise un contre-exemple.

2. $P(a) \vee \top \vdash P(a), \exists x.\neg P(x)$.
3. $P(a) \vee \top \vdash P(a), \forall x.\neg P(x)$.
4. $P(0), \forall y.P(y) \Rightarrow P(s(y)) \vdash \forall x.P(x)$.

Exercice 3 (Corollaires de la preuve de complétude)
Utiliser le théorème de complétude de LK_1 et sa preuve pour montrer les résultats suivants en calcul des prédicats :

1. L'ensemble des formules valides est récursivement énumérable.
2. Une formule en forme normale négative sans quantificateur existentiel et satisfaite dans tous les modèles finis est valide.
3. Si une formule a un modèle infini alors elle a un modèle infini dénombrable.

Exercice 4 (Équivalence de systèmes de preuve)
Si $\Delta = \phi_1, \ldots, \phi_n$, on notera $\neg\Delta = \neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n$.

1. Montrer l'équivalence entre NJ_1 et LJ_1.
2. Montrer que si $\Gamma \vdash_{LK_1} \Delta$ alors $\Gamma, \neg\Delta \vdash_{\mathrm{LA}_1} \bot$, où $\mathrm{LA}_1 = \mathrm{NJ}_1 + \bot_c$ et $\bot_c$ est la règle d'absurdité classique :
$$\frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\ RAA$$
3. En déduire que si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}_1} \Delta$, alors $\Gamma, \neg\Delta \vdash_{\mathrm{NK}_1} \bot$.
4. Montrer que si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}_1} \phi_1, \ldots, \phi_n$, alors $\Gamma \vdash_{\mathrm{NK}_1} \phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n$.