Logique

Maxime Bridoux

Exercice 1 (Formes de Skolem)

1. Donner $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ tels que
$$\phi = (\exists x.\ P(x)) \vee \forall x.\ (P(x) \Rightarrow \exists y.\ R(x,y))$$
soit une $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$-formule.
2. Skolémiser ϕ et préciser l'ensemble des symboles de fonctions $\overline{\mathcal{F}}$ qui apparaissent dans $Sk(\phi)$.
3. Skolémiser $(P(x) \vee \neg\exists y.\ R(x,y)) \Rightarrow \exists y.\ (R(x,y) \vee Q(y))$.

Exercice 2 (Structures de Herbrand)
Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ tels que $\mathcal{F}$ contienne au moins une constante. On définit une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-*structure de Herbrand* $\mathcal{H}$ comme une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure de domaine l'ensemble des termes clos $T(\mathcal{F})$, et dans laquelle les symboles de fonctions ont leur interprétation canonique sur le domaine des termes, i.e., $f_{\mathcal{H}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ d'arité n et $t_1, \ldots, t_n \in T(\mathcal{F})$.

1. Combien y a-t-il de structures de Herbrand pour :
   (a) $\mathcal{F} = \{a(0), b(0)\}, \mathcal{P} = \{R(1)\}$;
   (b) $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}, \mathcal{P} = \{=(2)\}$;
   (c) $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}, \mathcal{P} = \{Q(0)\}$.
2. Soit $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{R(1)\}$. Donner un modèle de Herbrand pour $\forall x.\ R(x) \Leftrightarrow \neg R(s(x))$.
3. Soit $\mathcal{F} = \{0(0), s(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{=(2)\}$. Skolémiser $\forall x \exists y.\ \neg(x = 0) \Rightarrow x = s(y)$. Donner un modèle de Herbrand de la formule résultante. Comment interpréter le symbole de fonction introduit par la skolémisation du $\exists y$? Peut-on créer un modèle de Herbrand de l'arithmétique élémentaire skolémisée où l'addition n'est pas commutative ?

Exercice 3 (Théorème de Herbrand)
On revisite dans cet exercice la preuve de complétude du calcul des séquents. On considère des séquents monolatères où toutes les formules sont en forme normale négative et sans quantificateur universel.

1. On se restreint aux stratégies s contenant des choix de la forme $\langle\phi\rangle$ ou $\langle\phi, t\rangle$ où t est un terme clos et ϕ une formule. Montrer que tous les séquents de $\Pi_s(\Gamma)$ sont clos.
2. Montrer que pour une branche d'échec β, on peut alors construire un contre-modèle $\mathcal{S}_\beta$ de domaine les termes clos.
3. En déduire le théorème de Herbrand.

Exercice 4 (Paradoxe de Skolem)
On dit qu'un modèle est au plus dénombrable si son domaine l'est.

Théorème 1 *(Théorème de Löwenheim-Skolem descendant) Soit une signature $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{R})$ dénombrable, et Γ un ensemble de formules closes sur $\mathcal{S}$. Si Γ admet un modèle, alors Γ admet un modèle au plus dénombrable.*

1. Démontrer le théorème 1 en utilisant le théorème de Herbrand.
2. En déduire qu'il existe un modèle au plus dénombrable de la théorie des ensembles.
3. Le théorème de Cantor nous assure pourtant qu'il existe des ensembles infinis non-dénombrables. Est-ce paradoxal ?